

線性變換必將直線變換成直線

(資料來源：龍騰教師手冊)

求證：直線經線性變換後必為直線

證明：

設 $A(x_1, y_1)$ 與 $B(x_2, y_2)$ 為平面上相異兩點，點 $P(x, y)$ 滿足

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}, \dots\dots\dots(*)$$

(上式即直線 AB 參數式)

由直線的參數式知：當參數 t 為任意數時， P 點形成直線 AB ；當參數 $0 \leq t \leq 1$ 時， P 點形成線段 AB 。

因為 $x = x_1 + (x_2 - x_1)t = (1-t)x_1 + tx_2$ ， $y = y_1 + (y_2 - y_1)t = (1-t)y_1 + ty_2$ ，

所以上式(*)可用矩陣表示為

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1-t) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \dots\dots\dots(**)$$

(上式即直線 AB 之參數式的矩陣表示法)

若線性變換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (其中 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$) 將點 $P(x, y)$ 變換成點 $P'(x', y')$ ，

且將 A, B 兩點變換成相異兩點 $A'(x'_1, y'_1)$ ， $B'(x'_2, y'_2)$ 。

$$\text{即：} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ 且 } \begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

而

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left((1-t) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= (1-t) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= (1-t) \begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \end{bmatrix} . \text{ (此即直線 } A'B' \text{ 參數式的矩陣表示法)}$$

所以，

當參數 t 為任意數時， $P'(x', y')$ 必為直線 $A'B'$ 上的點。

當參數 $0 \leq t \leq 1$ 時， $P'(x', y')$ 必為線段 $A'B'$ 上的點

故此線性變換將直線 AB 變換成直線 $A'B'$ ；將線段 AB 變換成線段 $A'B'$ 。