線性變換可表成推移、鏡射與伸縮變換的合成

由本章的教材我們知道:鏡射、伸縮與推移變換都是線性變換,並且知道這些變換的合成也都是線性變換.

反過來,是不是每一個線性變換都可表示成這些變換的合成呢？

我們以方陣 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ 作探討.

首先將方陣 A 作矩陣的列運算化為單位方陣 I:

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\times(-3)\ \rightarrow\begin{bmatrix}1&2\\0&-2\end{bmatrix}\leftarrow\left(-\frac{1}{2}\right)\ \rightarrow\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\times(-2)\ \rightarrow\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

這過程可用矩陣的乘積表示如下:

$$\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},$$

因此,

$$\begin{aligned}A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}1&0\\-3&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0\\0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix},\end{aligned}$$

即 A 可以表示成推移、鏡射與伸縮變換的合成.

一般而言,當 A 是二階可逆方陣時,可由矩陣的列運算將 A 化為單位方陣 I ,再將運算過程用矩陣的乘積表示,即

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I \text{ ,}$$

其中 $E_1, E_2, \ldots, E_k$ 為基本列運算的矩陣.因此,

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \text{ .}$$

因為這些基本列運算矩陣的反方陣 $E_1^{-1}, E_2^{-1}, \ldots, E_k^{-1}$ 也仍是基本列運算矩陣,而且其中除了形如 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} (h<0)$ 與 $\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (h<0)$ 的矩陣須改寫成鏡射與伸縮的合成外,其餘的矩陣都是推移、鏡射或伸縮變換矩陣,故任意二階可逆方陣所定義的線性變換都可以表示成推移、鏡射與伸縮變換的合成.