點到平面距離公式的另一個證明方法（垂直線段與法向量平行）

（資料來源：龍騰教師手冊）

設 $E: ax+by+cz=d$ 為一平面，而 $P(x_0, y_0, z_0)$ 為空間中一點．若自 P 點作一直線 PA 垂直 E 於點 $A(x_1, y_1, z_1)$，則 $\overline{PA}$ 的長度就是點 P 到 E 的距離，如圖 1 所示：

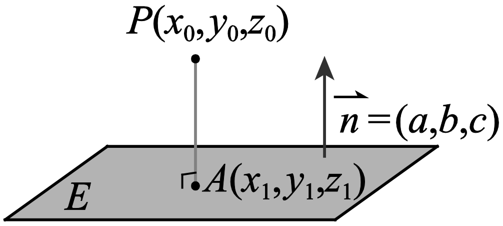

圖 1

因為直線 PA 垂直 E，所以 $\overrightarrow{PA}=(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$ 是 E 的一個法向量，

又因為 E 的方程式為：$ax+by+cz=d$，所以 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$ 也是 E 的一個法向量，

即 $\overrightarrow{PA}$ 和 $\overrightarrow{n}$ 平行．

利用內積的定義 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{n}=\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{n}\right|\cos\theta$，

因為 $\overrightarrow{PA}$ 和 $\overrightarrow{n}$ 平行，所以 $\theta=0°$ 或 $180°$，即 $\cos\theta=1$ 或 -1，$\left|\cos\theta\right|=1$．

由上面的討論知道 $\left|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{n}\right|=\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{n}\right|\left|\cos\theta\right|=\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{n}\right|$，　所以 $\left|\overrightarrow{PA}\right|==\dfrac{\left|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|}$

因此，點 P 到平面 E 的距離等於

$$\begin{aligned}
\overline{PA}&=\left|\overrightarrow{PA}\right|\\
&=\frac{\left|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|}\\
&=\frac{\left|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\
&=\frac{\left|ax_1+by_1+cz_1-ax_0-by_0-cz_0\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}
\end{aligned}$$

因為點 $A(x_1, y_1, z_1)$ 在 E 上，所以 $ax_1+by_1+cz_1=d$，

故 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到 $E: ax+by+cz=d$ 的距離為 $\dfrac{\left|ax_0+by_0+cz_0-d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$．