圓系

（資料來源：龍騰教師手冊）

圓系

兩圓 $C_1: x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$，$C_2: x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$ 交於 A，B 兩點，則過 A，B 兩點之圓方程式可表為 $mC_1+nC_2=0$ 型態，即

$$m\left(x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1\right)+n\left(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2\right)=0,$$

其中 m，n 為任意實數，$m+n\neq 0$．

上述的式子經整理仍是一個圓，

設 $A(x_1,y_1)$ 為圓 C_1 與 C_2 的交點，則

$$\begin{cases} {x_1}^2+{y_1}^2+d_1x_1+e_1y_1+f_1=0 \\ {x_1}^2+{y_1}^2+d_2x_1+e_2y_1+f_2=0 \end{cases},$$

故 $m\left({x_1}^2+{y_1}^2+d_1x_1+e_1y_1+f_1\right)+n\left({x_1}^2+{y_1}^2+d_2x_1+e_2y_1+f_2\right)=0$，

得 $A(x_1,y_1)$ 為此圓上一點．同理可得 B 也是此圓上一點．

當 m，n 的值變動時，$m\left(x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1\right)+n\left(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2\right)=0$ 表通過 C_1 與 C_2 交點的一系列的圓，我們稱之為圓 C_1 與 C_2 的圓系．

由上面的概念可再推得：

若 L 表示直線 AB 的方程式，即

$$L:(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)=0,$$

則過 A，B 兩點之圓方程式可表為 $C_1+kL=0$ 型態，即

$$\left(x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1\right)+k\left((d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)\right)=0,$$

其中 k 為任意實數．