$\sin 18°$ 與 $\cos 18°$ 的另一種求法（利用棣美弗定理）

（資料來源：龍騰教師手冊）

設 $\omega = \cos 72° + i\sin 72°$，則 $\omega^5 = 1$ 即 ω 是方程式 $x^5 = 1$ 的根．

因為 $\omega \neq 1$，所以 ω 是方程式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 的根．

兩邊除以 x^2（因為 $x \neq 0$），得 $x^2 + x + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$．

令 $x + \dfrac{1}{x} = y$，代入上式

得 $y^2 + y - 1 = 0$，解得兩根為 $y_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$y_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$，

分別解 $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 與 $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$，得四根

$x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$，$x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$，

$x_3 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$，$x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$，

但 $\cos 72°$，$\sin 72°$ 均為正值，

故 $\cos 72° = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$，$\sin 72° = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$，

即 $\sin 18° = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$，$\cos 18° = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$，

上述方法與方程式論有關，也與棣美弗定理有關．

【註】本文節錄自高級中學第二冊基礎數學教師手冊．

（國立臺灣師範大學科學教育中心主編，國立編譯館出版）