

## 平行四邊形定理（用餘弦定理來證明）

（資料來源：龍騰教師手冊）

平行四邊形定理：平行四邊形各邊的平方和等於對角線的平方和。

證明：

設四邊形  $ABCD$  為一平行四邊形。

在  $\triangle ABC$  中，根據餘弦定理，得

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{BC} \cos(\angle ABC) \quad (1)$$

在  $\triangle BCD$  中，根據餘弦定理，得

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2\overline{BC} \times \overline{CD} \cos(\angle BCD) \quad (2)$$

因為四邊形  $ABCD$  為平行四邊形， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC}$ ；

又  $\angle ABC$  與  $\angle BCD$  互補，所以

$$\cos(\angle ABC) = -\cos(\angle BCD)$$

將(1)+(2)兩式相加，即可得

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 .$$

（上式亦可簡寫成為  $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2)$  .）

