# 圓內接四邊形面積

（資料來源：龍騰教師手冊）

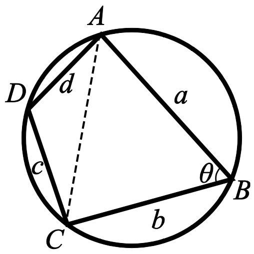
---

圓內接四邊形面積

若圓內接四邊形 $ABCD$ 的四個邊長分別為 $a$， $b$， $c$， $d$，

設 $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$，

則圓內接四邊形 $ABCD$ 的面積 $=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ .




---

證明：

利用餘弦定理，得

$\overline{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos B$ （1）

$\overline{AC}^2=c^2+d^2-2cd\cos D$ （2）

設 $\angle B=\theta$，因為圓內接四邊形的對角互補，

所以 $\cos D=\cos(180^\circ-B)=-\cos B=-\cos\theta$ .

將(1)及(2)式整理為 $\cos\theta=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$ .

得 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\dfrac{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)^2}}$ .

圓內接四邊形 $ABCD$ 的面積

$=\triangle ABC$ 的面積 $+\triangle ADC$ 的面積

$=\dfrac{1}{2}(ab+cd)\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}(ab+cd)\sqrt{\dfrac{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{16}\left(4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2\right)}$

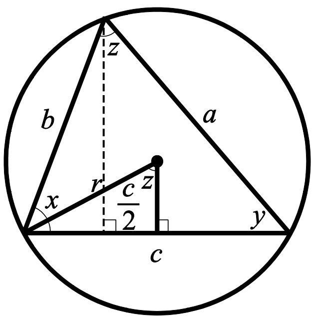
$=\sqrt{\dfrac{1}{16}(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)}$

$$=\sqrt{\frac{1}{16}\left((a+b)^2-(c-d)^2\right)\left((c+d)^2-(a-b)^2\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c+d-a)}{2}\cdot\frac{(a+d+c-b)}{2}\cdot\frac{(a+b+d-c)}{2}\cdot\frac{(a+b+c-d)}{2}}$$

$=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ .（因為 $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ ）




$c=a\cos y+b\cos x$