巴貝奇定理

（資料來源:龍騰教師手冊）

西元 1822 年英國劍橋大學數學家巴貝奇（Charles Babbage）在研究對數表時設計一套差分機（difference engine），由於當時的科技水準無法製造出非常精密的零件，因此該機器並沒有完成．但他的構想極為珍貴，他認為這部機器應包括輸入、輸出、儲存、運算、控制等五個單元，與目前的電腦架構極為接近，可說是電腦的開山鼻祖．

> 巴貝奇定理：
>
> 設 $f(x)$ 為多項式，$d \neq 0$，則
>
> （1）若 $f(x)=k$，k 為常數，則 $f(a+d)-f(a)=0$．
>
> （2）若 $f(x)$ 為一次式，則 $f(a+2d)-2f(a+d)+f(a)=0$．
>
> （3）若 $f(x)$ 為二次式，則 $f(a+3d)-3f(a+2d)+3f(a+d)-f(a)=0$．
>
> （4）若 $f(x)$ 為三次式，則
>
> $f(a+4d)-4f(a+3d)+6f(a+2d)-4f(a+d)+f(a)=0$．

證（1）$f(a+d)-f(a)=k-k=0$．

（2）設 $f(x)=px+r$，$p \neq 0$，

則 $f(x+d)-f(x)=\left(p(x+d)+r\right)-\left(px+r\right)=pd$，

取 $x=a$，得 $f(a+d)-f(a)=pd$　　①

取 $x=a+d$，得 $f(a+2d)-f(a+d)=pd$　　②

由②－①得 $f(a+2d)-2f(a+d)+f(a)=0$，

故得證．

（3）令 $g(x)=f(x+d)-f(x)$　　③

因 $f(x)$ 為二次式，所以 $g(x)$ 為一次式．

因此 $g(a+2d)-2g(a+d)+g(a)=0$　　④

在③式中分別取 $x=a+2d$，$a+d$，a，得

$$\begin{cases} g(a+2d)=f(a+3d)-f(a+2d) \\ g(a+d)=f(a+2d)-f(a+d) \\ g(a)=f(a+d)-f(a) \end{cases},$$

代入④式，得 $f(a+3d)-3f(a+2d)+3f(a+d)-f(a)=0$，

故得證．

(4) 令 $h(x)=f(x+d)-f(x)$ ⑤

因 $f(x)$ 為三次式，所以 $h(x)$ 為二次式．

因此 $h(a+3d)-3h(a+2d)+3h(a+d)-h(a)=0$ ⑥

在⑤式中分別取 $x=a+3d$， $a+2d$， $a+d$， a，得

$$\begin{cases} h(a+3d)=f(a+4d)-f(a+3d) \\ h(a+2d)=f(a+3d)-f(a+2d) \\ h(a+d)=f(a+2d)-f(a+d) \\ h(a)=f(a+d)-f(a) \end{cases},$$

代入⑥式，得 $f(a+4d)-4f(a+3d)+6f(a+2d)-4f(a+d)+f(a)=0$，

故得證．

設 $f(x)$ 為三次多項式，且 $f(1981)=1$， $f(1982)=9$， $f(1983)=9$， $f(1984)=9$，求 $f(1985)$ 的值．

解一 因 $f(x)$ 為三次多項式，

所以 $f(a+4d)-4f(a+3d)+6f(a+2d)-4f(a+d)+f(a)=0$

$\Rightarrow f(1981)-4f(1982)+6f(1983)-4f(1984)+f(1985)=0$

$\Rightarrow 1-4\times 9+6\times 9-4\times 9+f(1985)=0$

$\Rightarrow f(1985)=17$ ．

解二 設 $f(x)=a(x-1981)(x-1982)(x-1983)$

$+b(x-1981)(x-1982)+c(x-1981)+1$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1982)=c+1=9 \\ f(1983)=2b+2c+1=9 \\ f(1984)=6a+6b+3c+1=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{4}{3} \\ b=-4 \\ c=8 \end{cases},$$

所以 $f(1985)=\dfrac{4}{3}\times 4\times 3\times 2-4\times 4\times 3+8\times 4+1=17$ ．