多項方程式的公式解

解多項方程式具有很悠久的歷史，遠在西元前 1600 年，巴比倫人就提出了解二次方程式的問題．他們雖然提供了求解的方法，但並未發現代數公式來表示其根．而古希臘人雖以幾何作圖的方法解二次方程式，但至少到西元 100 年才發現了代數公式來表示其根．

所謂方程式的代數公式解就是由方程式的係數經過四則運算與開方等有理運算所得的解，通常稱為根式解（solution by radicals）．例如：

一元一次方程式

$$ax+b=0$$

的根式解為

$$x=-\frac{b}{a}\ .$$

又一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

的根式解為

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ .$$

至於三次和四次方程式的根式解比較困難，直到西元 1535 年才分別由義大利的數學家 Cardano（1501～1576）和他的學生 Ferrari 所發現．現在看來很簡單的多項方程式的根式解在當時卻耗費了數學家們很多的光陰．當四次方程式的根式解發現後，當時的數學家們接著就想要求得五次方程式的根式解，發現有些五次方程式無法求得根式解．最後，數學家們有了一個共同的猜測，即一般的五次方程式不能以根式求解，但沒有人提出證明．到了西元 1813 年始由 Ruffini（1765～1833）提出證明．可是後來發現，Ruffini 所提出的證明有誤，最後才由挪威的一個農家子弟 Abel（1802～1829）證明出來．事實上，Abel 剛開始也曾經犯了錯誤，誤證五次方程式有根式解．但很快的他就發現自己的錯誤，終於在 1824～1826 年間，證明了五次方程式不可能有根式解．Abel 解決了這個大問題之後，下一步很自然地尋求判斷一般的 n 次方程式是否可用根式求解的準則．當 Abel 正為此努力工作時，卻不幸因肺病於 1829 年逝世．在 1832 年，法國有一位青年數學家 Galois（1811～1832），他利用根的排列群證明一般五次以上的方程式不可用根式求解，並發展出永垂不朽的 Galois 理論．

我們在此所指的一般 n 次方程式是形如

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

的多項有理係數方程式．

註：本文節錄自國立編譯館高級中學基礎數學教師手冊第一冊第 95 頁（國立臺灣師範大學科學教育中心主編）

三次方程式的解法

一般的三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$，$a\neq 0$，可轉化成 $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$，

所以解一般的三次方程式只要討論 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的解即可．

令 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，

則 $f'(x)=3x^2+2ax+b$， $f''(x)=6x+2a$， $f'''(x)=6$，

由泰勒展開式知

$$f(x)=\frac{f'''\left(-\frac{a}{3}\right)}{3!}\left(x+\frac{a}{3}\right)^3+\frac{f''\left(-\frac{a}{3}\right)}{2!}\left(x+\frac{a}{3}\right)^2+\frac{f'\left(-\frac{a}{3}\right)}{1!}\left(x+\frac{a}{3}\right)+f\left(-\frac{a}{3}\right)$$

$$=\left(x+\frac{a}{3}\right)^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)\left(x+\frac{a}{3}\right)+\left(c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27}\right),$$

設 $y=x+\frac{a}{3}$，則 y 滿足缺二次項的三次方程式

$$y^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)y+\left(c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27}\right)=0,$$

因此如果能解出 $y^3+py+q=0$ 的根，就可以將原方程式解出．

令 $y=u+v$，則

$$y^3=(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)\Rightarrow y^3-3uvy-\left(u^3+v^3\right)=0,$$

上式與 $y^3+py+q=0$ 的解相同時，

$$\begin{cases}p=-3uv\\ q=-\left(u^3+v^3\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^3v^3=-\frac{p^3}{27}\\ u^3+v^3=-q\end{cases},$$

故 u^3， v^3 為 z 的二次方程式 $z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$ 的兩根．

不失一般性，可取

$$u^3=\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

$$v^3=\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

令 $\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$， $\beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$， $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，

由於三次方程式 $x^3=r$（r 為實數）的三個根為 $\sqrt[3]{r}$， $\sqrt[3]{r}\omega$， $\sqrt[3]{r}\omega^2$，

所以

$$u=\alpha,\ \alpha\omega,\ \alpha\omega^2,$$

$$v=\beta，\ \beta\omega，\ \beta\omega^2，$$

但因 $uv=-\dfrac{p}{3}$ 為實數，得出三組解為

$$\begin{cases}u=\alpha\\ v=\beta\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}u=\alpha\omega\\ v=\beta\omega^2\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}u=\alpha\omega^2\\ v=\beta\omega\end{cases}，$$

所以三次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三個根為

$$x=-\frac{a}{3}+\alpha+\beta，\ -\frac{a}{3}+\alpha\omega+\beta\omega^2，\ -\frac{a}{3}+\alpha\omega^2+\beta\omega\ .$$

求方程式 $x^3+9x^2+33x+52=0$ 的根．

解 由公式，$a=9$，$b=33$，$c=52$ 代入得

$$p=b-\frac{a^2}{3}=33-\frac{9^2}{3}=6,$$

$$q=c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27}=52-\frac{9\cdot 33}{3}+\frac{2\cdot 9^3}{27}=7\ .$$

所以

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{1}=1,$$

$$\beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-8}=-2\ .$$

故原方程式的三個根為

$$x_1=-\frac{a}{3}+\alpha+\beta=-3+1-2=-4,$$

$$x_2=-\frac{a}{3}+\alpha\omega+\beta\omega^2=-3+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}-2\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)=\frac{-5+3\sqrt{3}i}{2},$$

$$x_3=-\frac{a}{3}+\alpha\omega^2+\beta\omega=-3+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}-2\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)=\frac{-5-3\sqrt{3}i}{2}\ .$$

四次方程式的解法

一般的四次方程式可轉化成 $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$，又可改寫成 $x^4+bx^3=-cx^2-dx-e$，經配方得到 $\left(x^2+\dfrac{b}{2}x\right)^2=\left(\dfrac{1}{4}b^2-c\right)x^2-dx-e$.

兩端各加上 $\left(x^2+\dfrac{b}{2}x\right)\cdot k+\dfrac{1}{4}k^2$ 得

$$\left(x^2+\frac{b}{2}x+\frac{k}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{4}b^2-c+k\right)x^2+\left(\frac{1}{2}bk-d\right)x+\frac{k^2}{4}-e\ .$$

右端表一完全平方式的充要條件為判別式為 0，即

$$\left(\frac{1}{2}bk-d\right)^2-4\left(\frac{1}{4}b^2-c+k\right)\left(\frac{k^2}{4}-e\right)=0\ .$$

化簡得 $k^3-ck^2+(bd-4e)k-b^2e+4ce-d^2=0$.

設 y 為此 k 的三次方程式的一個根，則 $\left(x^2+\dfrac{b}{2}x+\dfrac{y}{2}\right)^2=(mx+n)^2$，即

$$x^2+\frac{b}{2}x+\frac{y}{2}=mx+n \text{ 或 } x^2+\frac{b}{2}x+\frac{y}{2}=-mx-n\ .$$

以上兩個二次方程式的解都是原四次方程式的解．

解方程式 $x^4+8x^3+24x^2+29x+8=0$ ．

解 $x^4+8x^3+24x^2+29x+8=0$

$\Rightarrow x^4+8x^3=-24x^2-29x-8$

$\Rightarrow \left(x^2+4x\right)^2=16x^2-24x^2-29x-8=-8x^2-29x-8$

$\Rightarrow \left(x^2+4x\right)^2+\left(x^2+4x\right)\cdot k+\dfrac{k^2}{4}=\left(x^2+4x\right)\cdot k+\dfrac{k^2}{4}-8x^2-29x-8$

$\Rightarrow \left(x^2+4x+\dfrac{k}{2}\right)^2=(k-8)x^2+(4k-29)x+\left(\dfrac{k^2}{4}-8\right)$ ①

取 k 值使右式為完全平方式，令判別式為 0，得

$$(4k-29)^2-4(k-8)\left(\frac{k^2}{4}-8\right)=0\Rightarrow k^3-24k^2+200k-585=0\ .$$

因為 $k=9$ 為此 k 的三次方程式的一根，代入①式得

$$\left(x^2+4x+\frac{9}{2}\right)^2=\left(x+\frac{7}{2}\right)^2,$$

即 $x^2+4x+\dfrac{9}{2}=x+\dfrac{7}{2}$ 或 $x^2+4x+\dfrac{9}{2}=-x-\dfrac{7}{2}$.

化簡得 $x^2+3x+1=0$ 或 $x^2+5x+8=0$，

所以原方程式的四個根為 $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{-5+\sqrt{7}i}{2}$，$\dfrac{-5-\sqrt{7}i}{2}$.