勘根定理的補充

（資料來源：龍騰教師手冊）

在學習勘根定理時，往往會有兩個疑問：

(1)要檢查到何時才停止檢查？

(2)若 $f(a)f(b)<0$，則在 a，b 之間必有實根，那到底有幾個實根？

以下面這個例子說明．

求方程式 $x^3+2x-5=0$ 在哪些連續整數之間有實根？

解 令 $f(x)=x^3+2x-5$，則

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-5	-2	7

表 1

因為 $f(1)f(2)<0$，所以在 1 與 2 之間有實根．

從上例中，產生了兩個問題：

(1) 表 1 中正整數只找到 2，負整數找到 -1 就停止檢查了，其他整數為何不用檢查，就可判斷只有在 1 與 2 之間有實根？

理由是：我們以綜合除法計算 $f(2)$ 與 $f(-1)$ 之值，得

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +0 & +2 & -5 & 2 \\ +) & +2 & +4 & +12 & \\ \hline 1 & +2 & +6 & +7 & =f(2) \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|l} 1 & +0 & +2 & -5 & -1 \\ +) & -1 & +1 & -3 & \\ \hline 1 & -1 & +3 & -8 & =f(-1) \end{array}$$

① 因為 $f(x)=(x-2)(x^2+2x+6)+7$，所以任何大於 2 的數代入 $f(x)$ 其值必為正．因此當綜合除法第三列（即商式的係數與餘式）符號皆非負時，函數值就恆為正了，所以就停止檢查．

② 因為 $f(x)=(x+1)(x^2-x+3)-8$，所以任何小於 -1 的數代入 $f(x)$ 其值必為負．因此當綜合除法第三列（即商式的係數與餘式）符號為正負相間時，函數值就恆為負了，所以就停止檢查．

(2) 在 1 與 2 間到底有幾個實根？

代數觀點

因為三次實係數多項式方程式可能有三實根或一實根，我們利用表 1 及描點的方法畫出 $y=x^3+2x-5$ 的大概圖形，如圖 1．

由圖 1 知，函數圖形與 x 軸交一點，所以此方程式的三個根為一實二虛根．但如果在 1 與 2 之間多描些點會不會如圖 2 的情形發生呢？若會，那不就變成三實根了嗎？事實上是不可能的，因為若令 $1<x_1<x_2<2$，則

$$\begin{aligned} f(x_2)-f(x_1) &= (x_2^3+2x_2-5)-(x_1^3+2x_1-5) \\ &= (x_2^3-x_1^3)+2(x_2-x_1) \\ &= (x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)+2(x_2-x_1), \end{aligned}$$

因為 $x_2>x_1>0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$．

故圖形在 1 與 2 之間是由左往右逐漸上升的，所以與 x 軸恰交一點．因此在 1 與 2 間恰有一實根．

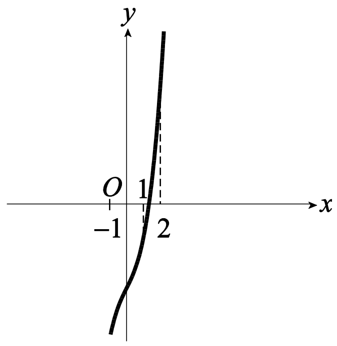

圖 1

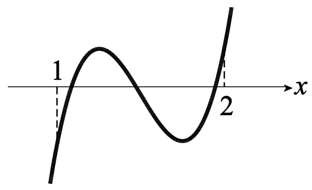

圖 2

幾何觀點

將方程式 $x^3+2x-5=0$ 先化成 $x^3=-2x+5$，再分別作出 $y=x^3$ 與 $y=-2x+5$ 的圖形，如圖 3，因為它們的交點數就是方程式 $x^3+2x-5=0$ 的實根數，所以 $x^3+2x-5=0$ 只有一實根而且此實根為交點的 x 坐標 t．

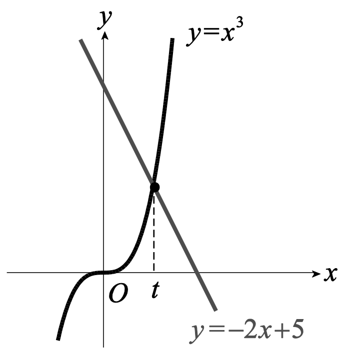

圖 3