無理根成對定理

（資料來源：龍騰教師手冊）

設 $f(x)$ 為有理係數多項式，a，b，c 為有理數，$b\neq 0$ 且 $\sqrt{c}$ 為無理數．若 $a+b\sqrt{c}$ 為方程式 $f(x)=0$ 的一根，則 $a-b\sqrt{c}$ 也是 $f(x)=0$ 的一個根．

證 令 $g(x)=\left(x-\left(a+b\sqrt{c}\right)\right)\left(x-\left(a-b\sqrt{c}\right)\right)=x^2-2ax+a^2-b^2c$，

設 $f(x)=g(x)q(x)+mx+n$，其中 $q(x)$ 是多項式，m，n 為有理數．

因 $a+b\sqrt{c}$ 為方程式 $f(x)=0$ 的一根，所以 $f\left(a+b\sqrt{c}\right)=0$．

又因 $g\left(a+b\sqrt{c}\right)=0$，所以 $m\left(a+b\sqrt{c}\right)+n=0$，即

$$(ma+n)+mb\sqrt{c}=0\Rightarrow\begin{cases}ma+n=0 & ①\\ mb=0 & ②\end{cases}$$

由②，因 $b\neq 0$，所以 $m=0$．代入①得 $n=0$，因此 $f(x)=g(x)q(x)$．

所以 $f\left(a-b\sqrt{c}\right)=g\left(a-b\sqrt{c}\right)q\left(a-b\sqrt{c}\right)=0\cdot q\left(a-b\sqrt{c}\right)=0$，

故 $a-b\sqrt{c}$ 是 $f(x)=0$ 的一個根．