零多項式的次數

（資料來源：龍騰教師手冊）

設多項式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，若 $a_n\neq 0$，則稱 $f(x)$ 的次數為 n，記作 $\deg f(x)=n$．而當 $f(x)$ 為零多項式時，通常都不討論它的次數，然而零多項式的次數應為何？我們從多項式的次數與運算的關係切入．

設 $f(x)$，$g(x)$ 為兩個非零多項式，則

(1) 若 $f(x)+g(x)\neq 0$，則 $\deg\left(f(x)+g(x)\right)\leq \max\left(\deg f(x),\deg g(x)\right)$．

(2) $\deg\left(f(x)g(x)\right)=\deg f(x)+\deg g(x)$．

上述這個立論中，我們必須小心的要求各多項式均不為零，否則將因次數無意義，而出現破綻．有沒有可能定義零多項式的次數，使得上面兩個性質對所有多項式（包括零多項式）仍然成立？

首先考慮(1)，如果 $f(x)=-g(x)$，則 $f(x)+g(x)$ 為零多項式，代入(1)式得

$$\deg 0\leq n，n \text{ 為非負整數}．$$

因此如果規定 $\deg 0=-1$ 就可以使(1)式成立，當然用任何負數代替 -1 也可以．

其次考慮(2)，如果 $f(x)$ 為零多項式，代入(2)式得

$$\deg 0=\deg 0+n．$$

可知 $\deg 0$ 不能是一個有限的數，除非 ∞ 或 $-\infty$ 才有這種「加之不增，減之無傷」的特性，若再配合前面的條件：$\deg 0\leq 0$，則只要規定 $\deg 0=-\infty$，那麼(1)(2)兩個性質，對所有多項式 $f(x)$，$g(x)$ 恆成立．

不但如此，在這樣的約定下，一些涉及次數的敘述，就不須把零多項式另外討論．例如：

① 多項式除法定理中，設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為兩個多項式，則存在有兩個多項式 $q(x)$ 與 $r(x)$，使得

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x),$$

其中

$$r(x)=0 \text{ 或 } 0\leq \deg r(x)<\deg g(x)．$$

有了 $\deg 0=-\infty$ 的規定，則上式簡寫成

$$\deg r(x)<\deg g(x)$$

就可以了．

② 若一個多項式 $f(x)$ 可表為

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

我們說 $f(x)$ 為一個次數不超過 n 次的多項式，而不須擔心當 $f(x)$ 為零多項式時次數無意義的問題．

然而，這樣的約定仍然有缺憾，當「倍式的次數不小於因式的次數」及「0 是所有多項式的倍式」的條件下，我們又該規定 $\deg 0=\infty$．

參考資料：

◆蔡聰明（2000），數學的發現趣談，臺北：三民書局