反函數

（資料來源:龍騰教師手冊）

兩個函數 $f(x)$ 和 $g(x)$，若滿足 $f(g(x))=g(f(x))=x$，我們即稱此兩函數互為反函數．

例如： $f(x)=y=2^x$ 和 $g(x)=\log_2 x$ 就是互為反函數的例子．因為

$$f(g(x))=2^{\log_2 x}=x，而 g(f(x))=\log_2 2^x=x\log_2 2=x .$$

兩個反函數的圖形互相對稱於直線 $y=x$，

這是因為若點 (a,b) 在 $y=f(x)$ 上，則 $g(b)=g(f(a))=a$，所以點 (b,a) 就會落在 $y=g(x)$ 上．從 $f(x)=y=2^x$ 和 $g(x)=\log_2 x$ 的圖形也可以清楚的驗證這一點，如圖 3 所示：

不是所有的函數都可以找到反函數．例如： $y=x^2$ 就沒有反函數，這是因為當我們將 $y=x^2$ 的圖形對直線 $y=x$ 對稱時，所得到的圖形並不是函數圖形．

如果要滿足對稱後依然是函數圖形，那麼原本的函數必須是一個「一對一」函數．

如果給定的函數 $f(x)$ 是一對一函數，那麼，因為 $f(x)$ 和其反函數 $g(x)$ 的作用相反，即

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} x .$$

因此，我們只要將 $f(x)$ 中的 x 與 y 互換，就可以得到反函數 $g(x)$．

例如： $f(x)=y=2x-1$，將 x 與 y 互換得到 $x=2y-1$，就是 $f(x)$ 的反函數 $g(x)$，

稍微整理一下 $x=2y-1$ 得到： $g(x)=y=\dfrac{x+1}{2}$ ．

以下我們將 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的圖形畫出來，如圖 4 所示．

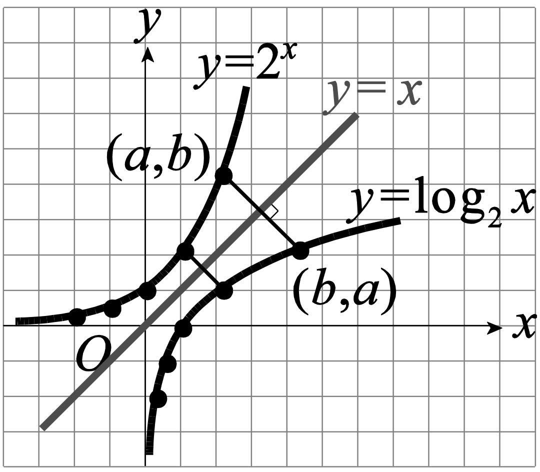

圖 3

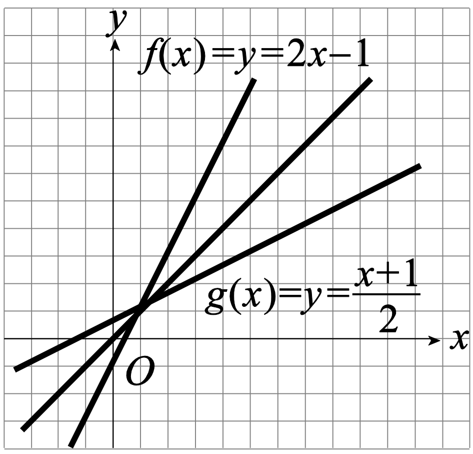

圖 4