由指數函數圖形觀察出算幾不等式

(資料來源:龍騰教師手冊)

我們知道算幾不等式為 $\dfrac{x_1+x_2}{2}\ge\sqrt{x_1x_2}$，

但也可以推廣為 $\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\ge\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$，或者 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$，但是其證明並不容易．如果我們不要求嚴格的證明，僅僅利用圖形來加以觀察，可以利用指數函數圖形輕易得到．

由 $y=2^x$ 的函數圖形可以發現：所有的正實數都可以用 2^x 表示，

因此，我們令 $x_1=2^{a_1}$， $x_2=2^{a_2}$， $x_3=2^{a_3}$ ．

首先將 $\left(a_1,2^{a_1}\right)$，$\left(a_2,2^{a_2}\right)$ 畫在 $y=2^x$ 的圖形上，如圖 1 所示：

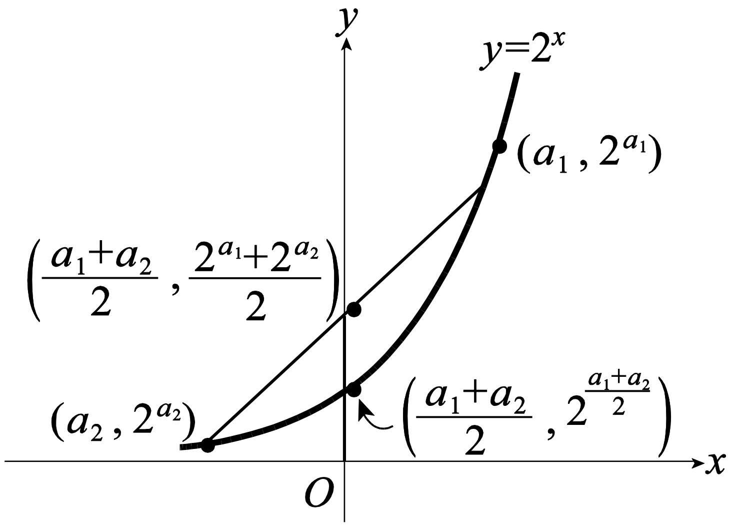

圖 1

因為 $y=2^x$ 的函數圖形是凹口向上，所以 $\dfrac{2^{a_1}+2^{a_2}}{2}$ 一定比 $2^{\frac{a_1+a_2}{2}}$ 來得大，即 $\dfrac{2^{a_1}+2^{a_2}}{2}>2^{\frac{a_1+a_2}{2}}=\sqrt{2^{a_1+a_2}}$，

又因為 $x_1=2^{a_1}$，$x_2=2^{a_2}$，所以 $\dfrac{x_1+x_2}{2}>\sqrt{x_1x_2}$ ．

利用這一個圖形發現，算幾不等式顯然是正確的，同時等號並不會成立，

除非兩點 $\left(a_1,2^{a_1}\right)$，$\left(a_2,2^{a_2}\right)$ 重合，即當 $x_1=x_2$ 時，$\dfrac{x_1+x_2}{2}=\sqrt{x_1x_2}$ ．

由圖 1 可清楚看出 $\dfrac{x_1+x_2}{2}\ge\sqrt{x_1x_2}$ ．

同樣的方式我們可以在 $y=2^x$ 的圖形上找出三個點 $\left(a_1,2^{a_1}\right)$，$\left(a_2,2^{a_2}\right)$，$\left(a_3,2^{a_3}\right)$，如圖 2 所示：

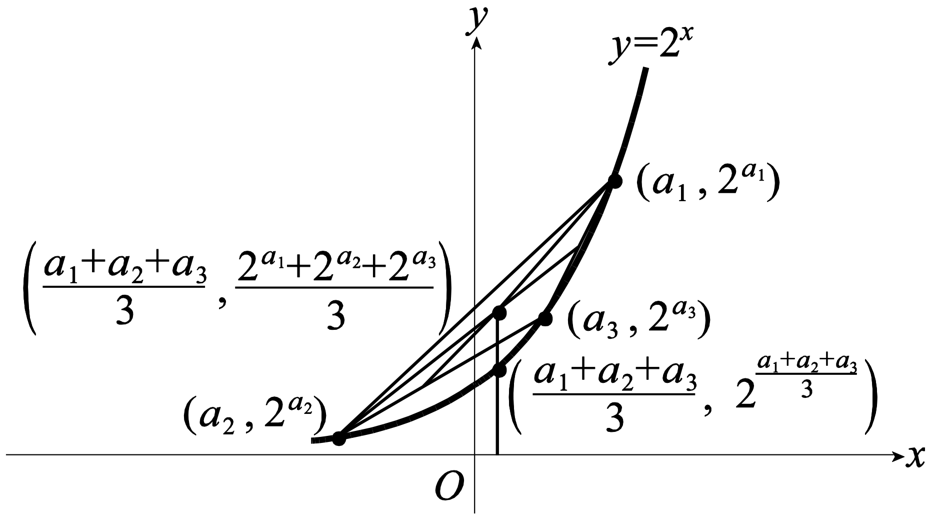

圖 2

因為函數圖形的凹口向上，所以**三角形的重心**位置會在函數圖形的上方，

因此，$\dfrac{2^{a_1}+2^{a_2}+2^{a_3}}{3}>2^{\frac{a_1+a_2+a_3}{3}}=\sqrt[3]{2^{a_1}2^{a_2}2^{a_3}}$，即 $\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\geq\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$.

同理，

因為函數圖形的凹口向上，

所以在函數圖形上找 n 個相異點，**這些點所構成的 n 多邊形之重心都會落在函數的上方**，因此可以推得

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\ .$$

所有凹口向上的函數統稱為凸函數，運用凸函數的性質，就可以發現算幾不等式，這樣，我們不需要冗長的證明，就可以體會算幾不等式是正確的，不論它是幾個數的算幾不等式．