$y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 的圖形交點

(資料來源:龍騰教師手冊)

我們知道 $y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$，不過，這兩個函數究竟有幾個交點呢?

觀察一下： $y=2^x$ 和 $y=\log_2 x$ 是沒有交點的，如圖 5 所示．
（如果 $y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 的底數 $a>2$，顯然兩函數的圖形是沒有交點的）

將底數 2 縮小，觀察 $y=1.46^x$ 與 $y=\log_{1.46} x$ 的函數圖形，兩個圖已經非常接近了，如圖 6 所示．

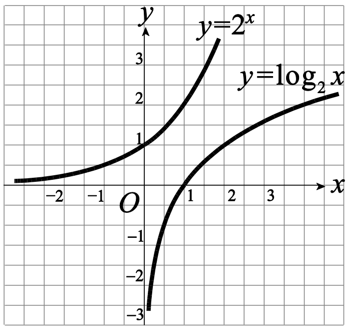

圖 5

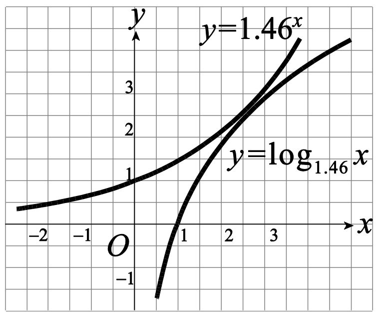

圖 6

再縮小一點，觀察 $y=1.42^x$ 與 $y=\log_{1.42} x$ 的函數圖形時，兩圖已有兩個交點，如圖 7 所示．因此，根據連續變化的道理，必然存在底數 a 滿足底數 $1.42<a<1.46$ 時，$y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 的圖形函數是相切的．

再將底數縮小， $y=1.04^x$ 和 $y=\log_{1.04} x$ 的函數圖形看起來僅有一個交點，如圖 8 所示，但是實際情形是如何呢?（請參見後面的結論）

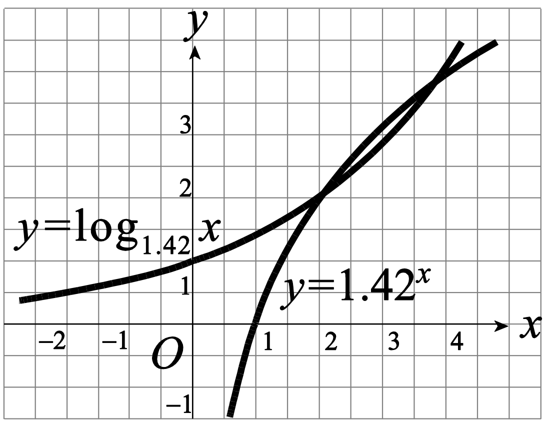

圖 7

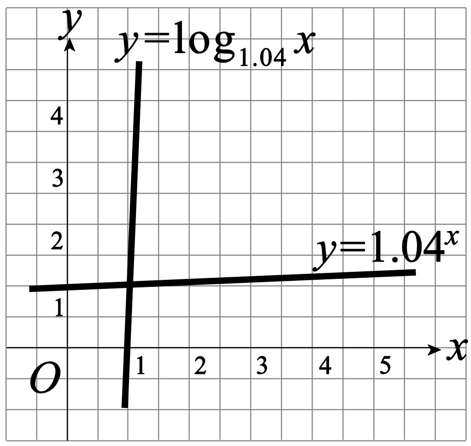

圖 8

若底數小於 1 呢？函數 $y=0.61^x$ 與 $y=\log_{0.61}x$ 的圖形有一個交點，如圖 9 所示．

底數接近 0 時的奇異現象：$y=0.02^x$ 和 $y=\log_{0.02}x$ 的圖形出現三個交點，如圖 10 所示．

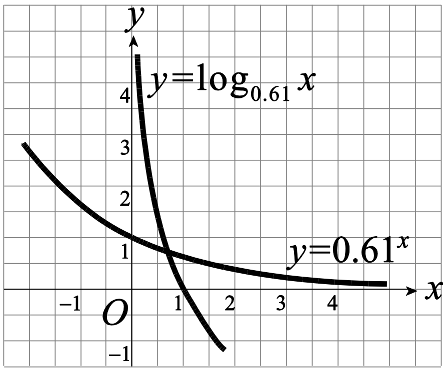

圖 9

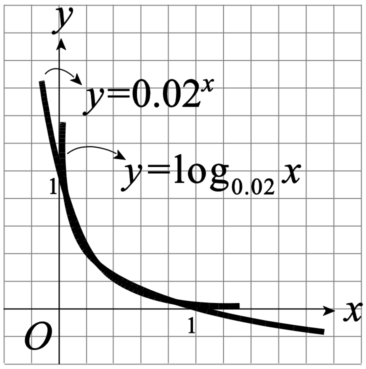

圖 10

上面的觀察利用 GSP 繪圖軟體，我們將底數用可變動的線段取代，改變底數的大小，仔細觀察就可以得到（雖然三個交點的情形不易觀察）．

有關 $y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 之圖形的交點個數的結論如下：

（詳細討論情形請參考數學傳播第 112 期「函數 $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 的圖形交點個數的探索」一文）

1. $a\in\left(0,e^{-e}\right)$，兩函數圖形有三個交點．
2. $a=e^{-e}$，兩函數圖形有一個交點$\left(\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{e}\right)$．
3. $a\in\left(e^{-e},1\right)$，兩函數圖形有一個交點．
4. $a\in\left(1,e^{\frac{1}{e}}\right)$，兩函數圖形有兩個交點．
5. $a=e^{\frac{1}{e}}$，兩函數圖形有一個交點$\left(e,e\right)$．
6. $a>e^{\frac{1}{e}}$，兩函數圖形沒有交點．