複利與自然對數的底數e

(資料來源:龍騰教師手冊)

當本金為 1 元，年利率為 100%時（雖然真實的銀行不會有這麼高的利率），經過一年的時間，本利和為$1+1=2$元．

如果我們將計息的時間改變，採每個月計息一次，則本利和為$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}=2.613$元，顯然比一年計息一次要高得多！

於是，我們想將計息的時間再做改變，每半個月計息一次，於是本利和為$\left(1+\frac{1}{24}\right)^{24}=2.664$元，又高了一些，

如果再改成每天計息一次，則本利和為$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}=2.715$元．那如果每次計息時間再縮短一點，會如何呢?

感覺上還是會一直增加，不過，會增加到怎樣的情形呢?

那就是看數列$\left\langle\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\rangle$，當$n$的值越來越大時，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$的值會如何?

答案是會收斂至$2.71828\cdots$，並不會再大幅增加，而這一個收斂值稱為自然對數的底數 e（是一個無理數）．

也就是說：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$，這是自然對數底數$e$的一種定義方式，

還有其他等價的定義方式：如無窮級數$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$，函數$\frac{1}{x}$的圖形從$x=1$到$x=e$與$x$軸所夾的面積為 1 等．

在微積分中，因為$\frac{d}{dx}e^{x}=e^{x}$，又$\frac{d}{dx}\log_{e}x=\frac{1}{x}$，所以自然對數$e$比常用對數 10 更為重要．

e是一個和π相等重要的常數，而$e^{\pi i}+1=0$更是最美麗的數學式．關於e可以參考天下文化出版的「毛起來說e」一書．