二項分布的標準差

（資料來源：龍騰教師手冊）

性質：設試驗 A 是「重複操作成功機率為 p 的伯努利試驗 n 次」. 執行試驗 A 多次，設 X 是每次成功的次數，則 X 的期望值 $E(X)=np$，變異數（標準差的平方）$Var(X)=np(1-p)$.

證明：在一伯努利試驗中成功的機率為 p（$0<p<1$），重複此試驗 n 次，n 次中成功的次數 X 與其機率分別為

X	0	1	…	k	…	n
P	$C_0^n p^0(1-p)^n$	$C_1^n p^1(1-p)^{n-1}$	…	$C_k^n p^k(1-p)^{n-k}$	…	$C_n^n p^n(1-p)^0$

根據上表，可計算出 n 次試驗中成功次數的

(1) 期望值 $E(X)$

$$
\begin{aligned}
E(X)&=\sum_{k=0}^{n}kC_k^n p^k(1-p)^{n-k}\\
&=\sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\\
&=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}\\
&=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\left[(n-1)-(k-1)\right]!}\ p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}\\
&=np\left(p+(1-p)\right)^{n-1}\ \ =np\ .
\end{aligned}
$$

(2) 變異數 $Var(X)$

因為 $Var(X)=E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right)\ =E\left(X^2\right)-2\left(E(X)\right)^2+\left(E(X)\right)^2\ =E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2$，

所以

$$
\begin{aligned}
Var(X)&=\sum_{k=1}^{n}k^2C_k^n p^k(1-p)^{n-k}-n^2p^2\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(k^2-k\right)C_k^n p^k(1-p)^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}kC_k^n p^k(1-p)^{n-k}-n^2p^2\\
&=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)C_k^n p^k(1-p)^{n-k}+E(X)-n^2p^2\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}+np-n^2p^2\\
&=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}p^{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)}+np-n^2p^2\\
&=n(n-1)p^2\left[p+(1-p)\right]^{n-2}+np-n^2p^2\\
&=n(n-1)p^2+np-n^2p^2\\
&=np(1-p)\ .
\end{aligned}
$$

故 X 的變異數 $Var(X)=np(1-p)$.