

三角函數的名稱與符號

(資料來源:龍騰教師手冊)

儘管三角知識起源很早，但用線段的比來定義三角函數，是尤拉在《無窮小分析引論》一書中首次給出。現今三角函數常用的有六個，但歷史上還曾出現四個，甚至十個以上的三角函數。底下是用線段來表示六個三角函數值：

(1) 正弦 (sine) : $\sin \alpha = \overline{MP}$

(2) 餘弦 (cosine) : $\cos \alpha = \overline{PN}$

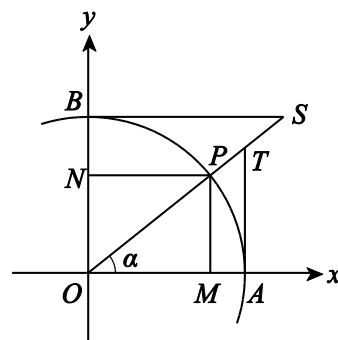
(3) 正切 (tangent) : $\tan \alpha = \overline{AT}$

(4) 餘切 (cotangent) : $\cot \alpha = \overline{BS}$

(5) 正割 (secant) : $\sec \alpha = \overline{OT}$

(6) 餘割 (cosecant) : $\csc \alpha = \overline{OS}$

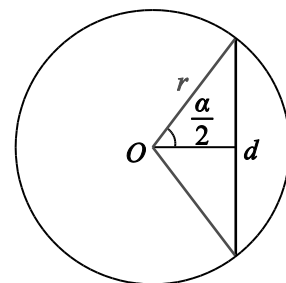
(其中 $\overline{OA} = \overline{OP} = \overline{OB} = 1$)



除了這六個函數外，還有「正矢」、「餘矢」、「外割」、「半正矢」、「古德曼函數」、「反古德曼函數」等十二個稱呼。這些函數的歷史長短不一，有的可以追溯到公元前，有的近幾十年才出現。在 1631 年鄧玉函、徐光啟的《大測》中，前八種函數已經齊備，分別叫做正弦（或弦）、餘弦、切線、餘切線、割線、餘割線、矢（或倒矢）、餘矢。後來「八線」一度成為三角學的別名。特將現今常用的六個函數介紹如下：

(1) 正弦函數

正弦是最重要也是最古老的一種三角函數，古希臘天文學家西帕霍斯（Hipparchus，約公元前 180~前 125）為了天文觀測的需要，做了一個「弦表」，它相當於現在的 $d = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$ （ r 表示圓半徑， α 表示圓心角， d 表示 α 所對的弦長）。



這就是正弦表的前身，托勒密在《天文學大成（Almagest）》中給 $0^\circ - 90^\circ$ 每隔半度的弦表，其作用相當於從 $0^\circ - 90^\circ$ 每隔 $\frac{1}{4}$ 度的正弦函數表。這是世界上最早的三角函數值表。他還利用「托勒密定理」（實出自西帕霍斯之手）推出若干三角恆等式，包括相當於正、餘弦的和差公式等。到了公元約 400 年，印度的天文書籍《蘇利耶曆數書（Surya Siddhanta）》中，出現了一個根據托勒密弦長表而來的半弦表。

但是，最早清楚寫出有關正弦函數著作的人，則是阿耶波多（Aryabhata，476~550）。他計算半弦並用 jya-ardha 稱半弦（簡寫為 jiva，獵人弓弦的意思）。後來經輾轉譯成拉丁文為 sinus，英文為 sine，是胸部、海灣或曲線的意思（月球地圖上看似海灣的地區現在仍稱為 sinus）。而《大測》一書將 sinus 譯為「正半弦」或「前半弦」，簡稱「正弦」，這是「正弦」術語的由來。

至於簡寫成 sin 的符號，最早是由英國的天文教授岡特（Edmund Gunter，1581~1626）所採

用。他製作刻有對數尺度的尺「岡特尺」。1624年， \sin 及 \tan 兩個符號，就是在「岡特尺」的圖示說明中首次出現。幾年以後，英國的奧特雷德（William Oughtred）在《比例圓與水平儀器（The Circles of Proportion and the Horizontal Instrument, 1632）》中使用了 \sin 這一縮寫，同時又簡寫成 S 。同時，法國的埃里岡（Pierre Herigoae）在《數學教程（Cursus Mathematicus, 1634）》中引入了一整套數學符號，其中包括 \sin 。雖然後來又有多種符號來表示正弦，但到了18世紀中葉以後，漸漸趨於統一用 \sin 。

(2) 餘弦函數

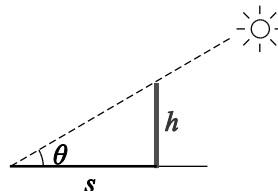
餘弦函數的重要性不亞於正弦函數，它的名稱是為了要計算餘角的正弦值而來的。這函數發展得較慢，名稱也很不統一。普拉托（Plate, 約1120）稱之為「剩餘的弦」（chorda residui），雷基奧蒙坦納斯（Johannes Regiomontanus, 1436~1476，歐洲15世紀最重要的三角學者之一）稱為「餘角的正弦」（sinus rectus Complementi, 約1463）。而 \cosinus （餘弦）這個名稱是岡特首先使用的，當初他寫為 $co.\sinus$ ，後來由約翰·牛頓（John Newton, 1622~1678）在1658年改為 \cosinus ，這名稱才確定下來。1674年由英國數學家兼測量師摩爾爵士（Jonas Moore, 1617~1679）率先使用，他創用 Cos 表示餘弦，到18世紀變成現在的 \cos 。

(3) 正切與餘切函數

這兩個函數由日圭及投影的想法，也就是日影的測量而引起，但是把這兩種比率視為角的函數，則是由阿拉伯人開始的。古人立竿測日影以定時間，後來發展成為日晷，如圖：

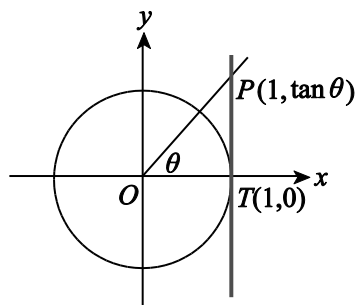
設桿長為 h ，桿長的投影長度為 s ，得

$$s = h \times \frac{\sin(90^\circ - \theta)}{\sin \theta} \quad (\text{其實就是 } s = h \times \cot \theta).$$



上式中只用了正弦函數，這是因為其他的三角函數還沒有名稱的原因。在中國有周公測景的記載（約公元前1100年），在古希臘有泰勒斯（Thales）利用日影確定金字塔高度的記載（約公元前600年）。第一個呈現正切和餘切表是由梅法茲（al-Mervazi）在公元860年左右製作出的，而天文學家巴坦尼（al-Battani）為了研究日晷，製作了每隔 1° 的「投影表」，也就是餘切函數表（920年左右）。

現代的名稱 \tan （正切），在1583年由丹麥數學家芬因克（Thomas Fincke, 1561~1646）提出，至於 \cot （餘切）這個字最早是在1620年由岡特使用。正切（ \tan ）這個字來自拉丁文 $tangege$ ，是「碰觸」的意思，而這個字之所以和正切函數產生關聯或許是因為以下的觀察：



現今在單位圓上定義三角函數的方法，就是利用此作圖法。

(4) 正割和餘割函數

正割、餘割函數出現得更晚，雖然正割、餘割約在 860 年由海拜什哈西卜首先提出，到艾布瓦法（約 980）正式使用，不過未給特別名稱。這兩種函數沒有引起當時人們的注意，直到 1551 年雷蒂克斯（Georg J. Rhaticus, 1514~1576）才在《三角學說準則（Canon doctrinae triangulorum）》中完全收入正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割這 6 種函數並附正割表。至於 sec 符號則由出生於法國而在荷蘭度過大半生的數學家吉拉德（Albert Girard, 1595~1632）首先使用，而餘割至今仍未有統一的符號，常見的符號有 csc, cosec 等。