利用棣美弗定理導出正、餘弦函數的三倍角公式

(資料來源:龍騰教師手冊)

因為 $(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3\cos^2\theta\cdot i\sin\theta+3\cos\theta\cdot(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3$

$=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)$,

又由棣美弗定理，知 $(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos3\theta+i\sin3\theta$,

所以

$$\cos3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)$$
$$=4\cos^3\theta-3\cos\theta\ .$$

$$\sin3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta=3(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta$$
$$=3\sin\theta-4\sin^3\theta\ .$$